http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit33-00-012
DOI: 10.30890/2567-5273.2024-33-00-012

УДК 517

DIVISION OF A CURVILINEAR TRAPEZIO BY A LINE IN A GIVEN RATIO

ПОДІЛ КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ ПРЯМОЮ У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Hryhulych S.M./ Григулич С.М.
Cand. of pedagogical sc. assoc. prof. / канд. пед. н., доцент
ORCID: 0000-0001-6223-5604
Shchekan N.P./ Щекань Н.П.
Teacher / викладач
ORCID: 0000-0002-1784-6139
Ukraine, Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman, Kyiv, Beresteysky prospect, 54/1, 03057
Україна, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Берестейський проспект, 54/1, 03057

Анотація. *Розглянуто розвиток задачі поділу відрізка точкою у заданому відношенні щодо поділу плоских фігур. Розв'язана задача поділу криволінійної трапеції у певному відношенні прямою, що паралельна осі Oy. Виведені формули знаходження лінії* $x = m$ *для двох задач:*

1) *Поділ криволінійної трапеції, що обмежена лініями:* $y = f(x),\ x = a,\ x = b$ *прямою* $x = m$ *у відношенні* λ *вздовж осі Ox, де* $b > m > a$.

2) *Поділ плоскої фігури, що обмежена лініями:* $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$, *прямою* $x = m$ *у відношенні* λ *вздовж осі Ox, де* $f(x) > g(x),\ b > m > a$.

Ключові слова: *Координатна площина, плоска фігура, криволінійна трапеція, площа, інтегрування, пряма, рівняння прямої, відношення, пропорція, рівновеликі геометричні фігури, поділ плоскої фігури у певному відношенні.*

Вступ.

Задачі поділу плоских і просторових геометричних фігур є актуальними теоретичними задачами практичного застосування у багатьох сферах життєдіяльності. Як приклад: для сучасних напрямків архітектурного планування, реалізації ідей функціоналу будівлі з урахуванням ландшафту її місцезнаходження і таке ін. У статті розглянуто задача поділу плоскої фігури, а саме криволінійної трапеції, паралельною прямою до її основ.

Основний текст.

Задача знаходження координат точки *C*, яка ділить відрізок *AB* на дві частини в заданому відношенні λ розв'язується за допомогою відомих формул:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda};\ \ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda};\ \ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Розглянемо задачу виведення формули для поділу криволінійної трапеції, що обмежена зверху функцією $y = f(x)$, і з боків лініями $x = a,\ x = b$, у певному відношенні λ вздовж осі Ox лінією $x = m$, де $b > m > a$ (Рис.1).

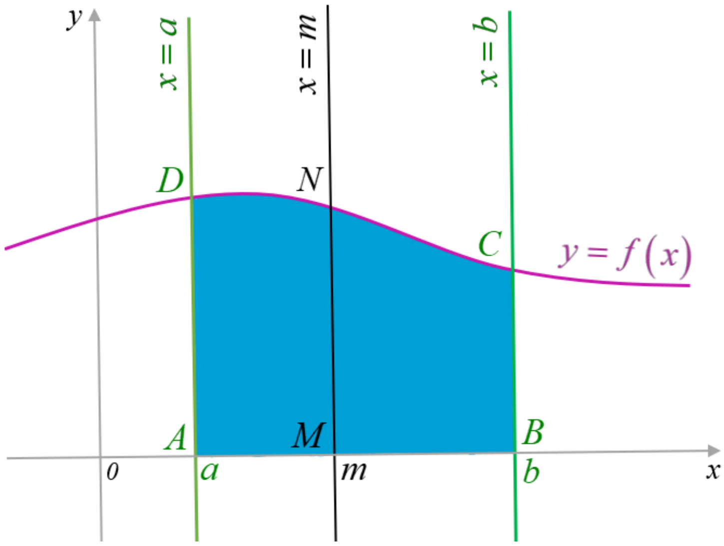

Рисунок 1. [розр. автор.]

$$\frac{S_{ADNM}}{S_{MNCB}} = \lambda.$$

$$\frac{\int_a^m f(x)\,dx}{\int_m^b f(x)\,dx} = \lambda,$$

$$\int_a^m f(x)\,dx = \lambda \int_m^b f(x)\,dx,$$

$$F(x)\Big|_a^m = \lambda\, F(x)\Big|_m^b,$$

$$F(m) - F(a) = \lambda\left(F(b) - F(m)\right),$$

$$F(m) - F(a) = \lambda F(b) - \lambda F(m),$$

$$F(m)(1+\lambda) = F(a) + \lambda F(b),$$

$$F(m) = \frac{F(a) + \lambda F(b)}{1+\lambda},$$

$$m = F^{-1}\left(\frac{F(a) + \lambda F(b)}{1+\lambda}\right),$$

де $F(x)$ i $F^{-1}(x)$ - обернені функції.

Рекомендована формула для використання у розв'язанні задач цього виду:

$$\boxed{F(m) = \frac{F(a) + \lambda F(b)}{1+\lambda}}$$

Приклад. Знайдемо параметр m лінії $x = m$, яка ділить плоску фігуру, обмежену лініями $y = 0,04x^2$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, у відношенні 2:3 в напрямку осі Ox (рис.2).

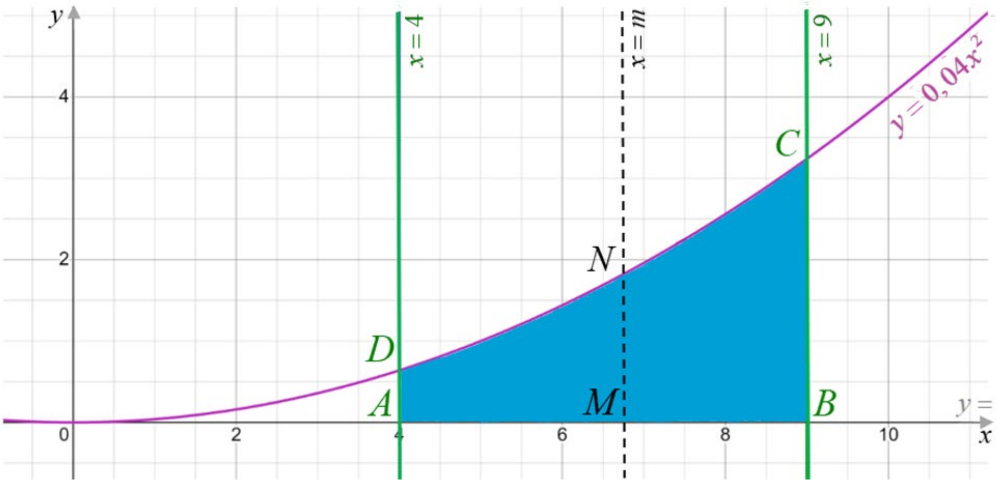

Рисунок 2. [розр. автор.]

$$\frac{S_{ADNM}}{S_{MNCB}} = \frac{2}{3}.$$

Розв'язання:

$$f(x) = 0,04x^2 = \frac{x^2}{25}, \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{75}, \ (C = 0).$$

$$F(m) = \frac{F(a) + \lambda F(b)}{1 + \lambda},$$

$$\frac{m^3}{75} = \frac{\frac{4^3}{75} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9^3}{75}}{1 + \frac{2}{3}},$$

$$m^3 = \frac{3\left(4^3 + \frac{2}{3} \cdot 9^3\right)}{5};$$

$$m^3 = \frac{3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 9^3}{5};$$

$$m^3 = 330;$$

$$m = \sqrt[3]{330} \approx 6,91 \text{ (рис.3)}$$

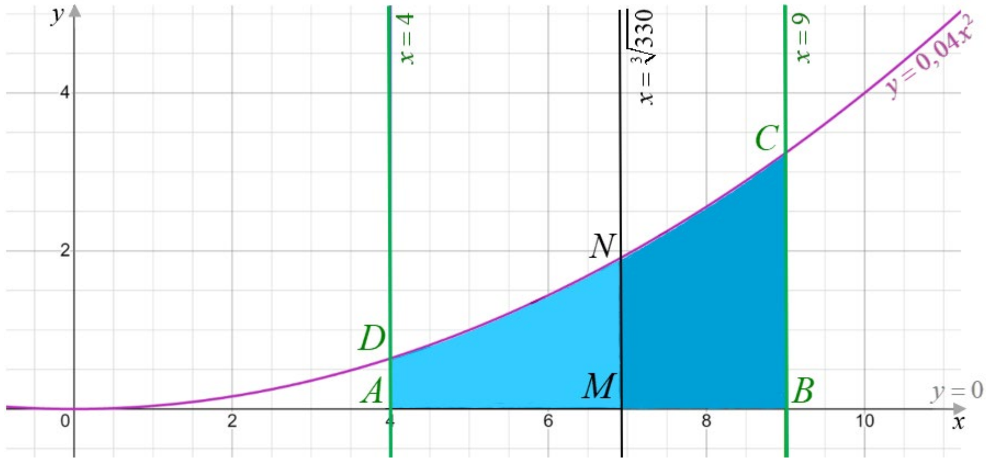

Рисунок 3. [розр. автор.]

Розглянемо задачу поділу плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, у певному відношенні λ вздовж осі Ox лінією $x = m$, де $f(x) > g(x)$, $b > m > a$ (рис.4).

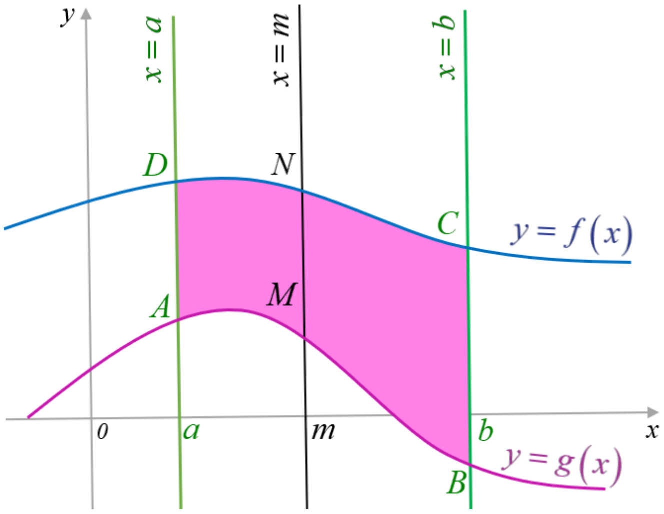

Рисунок 4. [розр. автор.]

$$\frac{S_{ADNM}}{S_{MNCB}} = \lambda.$$

$$\frac{\int_a^m \left(f(x) - g(x)\right)dx}{\int_m^b \left(f(x) - g(x)\right)dx} = \lambda,$$

$$\int_a^m \left(f(x) - g(x)\right)dx = \lambda \int_m^b \left(f(x) - g(x)\right)dx,$$

$$\left(F(x) - G(x)\right)\Big|_a^m = \lambda\left(F(x) - G(x)\right)\Big|_m^b,$$

де $F(x)$ *і* $G(x)$ *первісні функції для функцій* $f(x),\ g(x)$.

$$F(m)-G(m)-F(a)+G(a)=\lambda\left(F(b)-G(b)-F(m)+G(m)\right),$$

$$F(m)-G(m)-F(a)+G(a)=\lambda F(b)-\lambda G(b)-\lambda F(m)+\lambda G(m),$$

$$F(m)-G(m)+\lambda F(m)-\lambda G(m)=F(a)-G(a)+\lambda F(b)-\lambda G(b),$$

$$\left(F(m)-G(m)\right)(1+\lambda)=F(a)-G(a)+\lambda\left(F(b)-G(b)\right),$$

$$F(m)-G(m)=\frac{F(a)-G(a)+\lambda\left(F(b)-G(b)\right)}{1+\lambda}.$$

Рекомендована формула для використання у розв'язанні задач цього виду:

$$\boxed{F(m)-G(m)=\frac{F(a)-G(a)+\lambda\left(F(b)-G(b)\right)}{1+\lambda}}$$

Приклад. Знайдемо параметр m лінії $x=m$, яка ділить плоску фігуру, обмежену лініями $y=0,04x^2-1,\ y=\sqrt{x},\ x=1,\ x=8$, у відношенні 2:1 в напрямку осі Ох (рис.5).

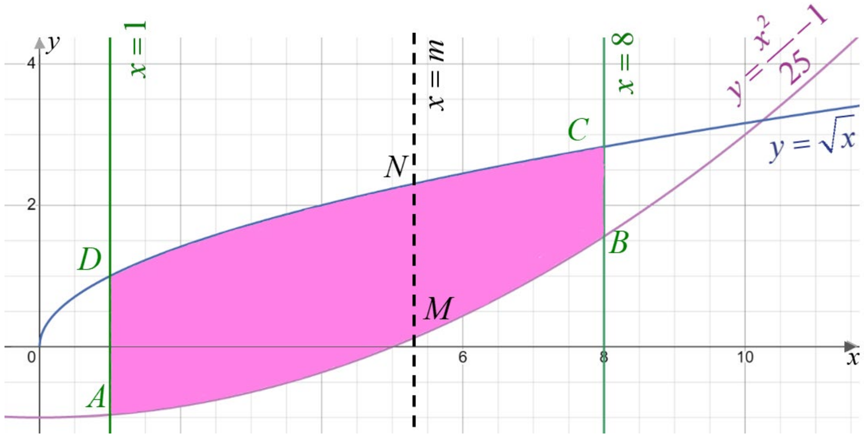

Рисунок 5. [розр. автор.]

На рисунку 5: $\dfrac{S_{ADNM}}{S_{MNCB}}=2.$

Розв'язання:

$$f(x)-g(x)=\frac{x^2}{25}-\sqrt{x}-1,\ \Rightarrow$$

$$f(x)-g(x)=\frac{x^2}{25}-\sqrt{x}-1,\ \Rightarrow\ F(x)-G(x)=\frac{x^3}{75}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}-x,\ (C=0).$$

$$F(m)-G(m)=\frac{F(a)-G(a)+\lambda\left(F(b)-G(b)\right)}{1+\lambda},$$

$$\frac{m^3}{75}-\frac{2m\sqrt{m}}{3}-m=\frac{\frac{1^3}{75}-\frac{2\cdot\sqrt{1}}{3}-1+2\left(\frac{8^3}{75}-\frac{2\cdot 8\sqrt{8}}{3}-8\right)}{1+2},$$

$$\frac{m^3}{25}-2m\sqrt{m}-3m=\frac{1^3}{75}-\frac{2\cdot\sqrt{1}}{3}-1+\frac{2\cdot 8^3}{75}-\frac{4\cdot 16\sqrt{2}}{3}-16,$$

$$3m^3-150m\sqrt{m}-225m=1-50-75+1024-1600\sqrt{2}-1200,$$

$$3m^3-150m\sqrt{m}-225m+1600\sqrt{2}+300=0,$$

Рівняння було розв’язане у Wolfram|Alpha:

$$m_1\approx 5,27279,\ \ m_2\approx 14,2915.$$

Умову задачі задовільняє корінь $m_1\approx 5,27279$ (рис.6).

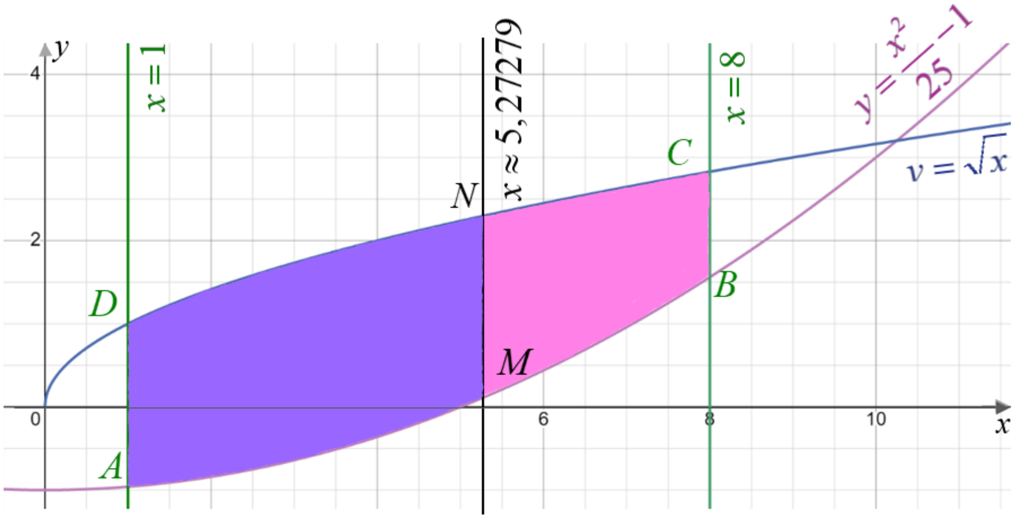

Рисунок 6. [розр. автор.]

Підсумки та висновки.

У результаті дослідження задачі поділу плоских фігур лініями на частини у певному відношенні вивели формулу для поділу криволінійної трапеції лінією $x=m$, що обмежена лініями: $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, у певному відношенні λ вздовж осі Ох, де $b>m>a$. Ця формула має вигляд:

$$\boxed{F(m)=\frac{F(a)+\lambda F(b)}{1+\lambda}}.$$

Як наслідок, отримали також формулу для задачі поділу плоскої фігури, що обмежена лініями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, у певному відношенні λ вздовж осі Ох лінією $x=m$, де $f(x)>g(x)$, $b>m>a$:

$$\boxed{F(m)-G(m)=\frac{F(a)-G(a)+\lambda\left(F(b)-G(b)\right)}{1+\lambda}}$$

Література:

1. Сучасні освітні технології в перспективі розв'язання проблем якості навчання. Григулич. С.М. Науково-методична конференція КНЕУ: «Досвід організації та активізації навчального процесу на основі впровадження інноваційних технологій». Лютий 2008 р. Т.2. С. 136-137
2. Григулич С.М. Горохова О.М. Щекань Н.П., Онлайн аудиторія. Значення онлайн середовища у навчанні з математики. IX Міжнародна науковопрактична конференція «Questions regarding the problems of higher education», 04-06 березня 2024 р., Бордо, Франція, ст.265-266.
3. Григулич С.М. Горохова О.М. Щекань Н.П., Візуалізація математичних об'єктів навчання. Область визначення та область значень функції двох змінних. XIII Міжнародна науковопрактична конференція «Innovative scientific research: balance of theory and practical application», 06-08 березня 2024р., Брюссель, Бельгія, ст.190-192.
4. Григулич С.М., Щекань Н.П. Використання кольору у математичному тексті, як допоміжного засобу покращення демонстрації логічних переходів його змісту// "Modern engineering and innovative technologies" Выпуск №32 (4 томи) 2024 р. 0,82 д.а. с. 103-108.

Abstract. *The development of the problem of division of a segment by a point in a given relation to the division of plane figures is considered. The problem of division a curved trapezoid in a certain ratio by a straight line parallel to the Oy axis is solved. Derived formulas for finding a line for two problems:*

1) *Division of a curved trapezoid bounded by lines*: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ *straight line* $x = m$ *in relation* λ *along the axis* Ox, *if* $b > m > a$.

2) *Division of a plane figure bounded by lines*: $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, *straight line* $x = m$ *in relation* λ *along the axis* Ox, *if* $f(x) > g(x)$, $b > m > a$.

Keywords: *Coordinate plane, plane figure, curved trapezoid, area, integration, straight line, equation of straight line, relationship, proportion, geometric figures of equal size, division of a plane figure in a certain ratio.*

Article sent: 29.05.2024